第 34 講　数列(1)

【基礎確認事項】

［1］　数列の概念

□数を一列に並べたものを**数列**という．以下では，ある規則にしたがって並んでいる数の列を扱う．

偶数の列 2，4，6，8，…… を例に考える．数列のおのおのの数をその数列の**項**といい，はじめから順に第 1 項，第 2 項，第 3 項，…… という．第 1 項は**初項**ともいう．上の例では，初項は 2，第 3 項は 6，第 10 項は 20 である．また，第 n 項をおのおのの項の代表と考えるとき，これを**一般項**という．

□数列を表すには，一般に

$\{a_n\}$：a_1，a_2，a_3，……，a_n，…… と添字をつけて表す．a_1 が初項であり，a_n が第 n 項，すなわち一般項である．

$a_n=2n$ というように一般項 a_n を n の式で表すことができるとき，この n に 1 から順に自然数を代入すると，数列 $\{a_n\}$ の項が順に　2，4，6，8，…… と得られる．

項の数が有限である数列を**有限数列**といい，その項の個数を**項数**，最後の項を**末項**という．これに対し，項の数が無限である数列を**無限数列**という．

［2］　等差数列

奇数を 1 から順に並べると

1，3，5，7，……

となる．これは，初項 1 に 2 を次々に加えていったものである．

□一般に，数列の各項がすぐ前の項に一定の数 d を加えて得られるとき，この数列を**等差数列**といい，その一定の数 d を**公差**という．上の例では $d=2$ である．

□初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の各項は順に

$a_1=a$，$a_2=a+d$，$a_3=a+2d$，…… であり，その一般項 a_n は

$$a_n=a+(n-1)d$$

と表される．

またその定義から，数列 $\{a_n\}$ が等差数列であることを示すには

$a_{n+1}-a_n=d$（d は一定）（$n=1$，2，3，……）が成り立つことを示せばよい．

□等差数列 a，b，c において，この 3 項の中央の項 b を**等差中項**という．これについて，次が成り立つ．

$$\text{数列 } a,\ b,\ c \text{ が等差数列} \iff 2b=a+c$$

□初項 a，公差 d，項数 n の等差数列の和を S_n とすると

$$S_n=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+\{a+(n-1)d\} \quad \cdots\cdots①$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

である．

この数列の末項を l とし，逆の順に l から並べた数列は，初項 l，公差 $-d$ の等差数列である．その和 S_n は

$$S_n=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots+\{l-(n-1)d\}\quad\cdots\cdots②$$

と表される．①＋② より

$$2S_n=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots\cdots+(a+l)=n(a+l)$$

であることより，

$$S_n=\frac{n(a+l)}{2}$$

が得られる．また，$l=a+(n-1)d$ であるから

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

である．

⇒　C&U ①

［３］　等比数列

数列 1，2，4，8，……　は，初項 1 に 2 を次々にかけていったものである．

□一般に，数列の各項がすぐ前の項に一定の数 r をかけて得られるとき，この数列を**等比数列**といい，その一定の数 r を**公比**という．上の例では $r=2$ である．

□初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の各項は順に

$a_1=a$，$a_2=ar$，$a_3=ar^2$，…… であり，その一般項 a_n は

$$a_n=ar^{n-1}$$

と表される．

またその定義から，数列 $\{a_n\}$ が等比数列であることを示すには

$a_{n+1}=ra_n$（r は一定）（$n=1$，2，3，……）が成り立つことを示せばよい．

□等比数列 a，b，c において，この 3 項の中央の項 b を**等比中項**という．これについて，次が成り立つ．

数列 a，b，c が等比数列　$\Longleftrightarrow$　$b^2=ac$

□項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和を S_n とすると

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}\quad\cdots\cdots①$$

である．

①の両辺に r をかけて

$$rS_n=ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^n\quad\cdots\cdots②$$

①－②より

$S_n-rS_n=a-ar^n$　　ゆえに　$(1-r)S_n=a(1-r^n)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

したがって

$r \neq 1$ のとき　$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

である．

$r>1$ のときは $S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$ を，$r<1$ のときは $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ を用いるとよい．また，

$r=1$ のときは　①より $S_n = a+a+\cdots\cdots+a$（n 個）である．

したがって　$r=1$ のとき　$S_n = na$

⇒　C&U ２

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

【CHECK & UP】

1 (1) 第10項が28，第40項が148である等差数列の初項と公差を求めよ．また，192はこの数列の第何項か．

(2) 公差3，末項43，項数20の等差数列の和を求めよ．

2 (1) 第4項が −54，第7項が1458である等比数列の初項と公比を求めよ．また，−486はこの数列の第何項か．

(2) 初項3，公比2の等比数列の初項から第 n 項までの和が93であるとき，項数 n を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第34講　数列(1)

1　第10項が230，第25項が-220の等差数列について，次の問いに答えよ．

(1)　初項と公差を求め，一般項をnを用いて表せ．

(2)　初項から第n項までの和をnを用いて表せ．

(3)　初項から第n項までの和の最大値と，それをとるnを求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　等比数列 $\{a_n\}$ において，

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{10}=3,\quad \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_{10}}=2$$

のとき，積 $a_1a_2a_3\cdots\cdots a_{10}$ の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］ 2つの正の数 a, b がある．a と b の間に1つの数 m を入れて，a, m, b がこの順に等差数列，等比数列をなすような m の値をそれぞれ求めよ．

［2］ 3次方程式 $x^3+ax^2+bx+8=0$ が3つの実数解 α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ をもつとする．α, β, γ はある順で等差数列となり，またある順で等比数列となる．このとき，実数 a, b, α, β, γ の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 34 講　数列(1)

(1)　第 10 項が -20，第 20 項が -50 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n=-$ ア $n+$ イウ である．よって　-110 は数列 $\{a_n\}$ の第 エオ 項であり，

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和の最大値は カキ である．

(2)　公比が実数である等比数列 $\{a_n\}$ において，$a_6+a_7+a_8=3$，$a_9+a_{10}+a_{11}=-\dfrac{3}{8}$ が成り立つ．このとき　$a_{10}=\dfrac{\text{ク}}{\text{ケ}}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 34 講　数列(1)

【CHECK & UP】

1 (1)　初項を a，公差を d とすると，この等差数列 a_n の一般項は

$a_n=a+(n-1)d$　と表される．

条件より　$a+9d=28$，$a+39d=148$

よって　$a=-8$，$d=4$　　よって　**初項 −8　公差 4**

一般項は $a_n=-8+(n-1)\cdot 4=4n-12$

これが 192 になるのは　$4n-12=192$ より　$n=51$

したがって 192 はこの数列の**第 51 項**である．

> 等差数列の一般項に関する問題．一般項は，公式というにはあまりに当たり前の形．初項から始まり，一定数ずつ増加し続ける，または減少し続ける感覚を身につけよう．

(2)　この等差数列の一般項の初項を a とすると，第 20 項が 43 より

$a+19\cdot 3=43$　よって　$a=-14$

よって求める和は　$\dfrac{20}{2}(-14+43)=\mathbf{290}$

> 末項が第 20 項であることは問題文には記載されていないので，問題文から判断する必要がある．等差数列の和は「初項」「末項」「項数」により決まる．

2 (1)　初項を a，公比を r とすると，この等比数列 a_n の一般項は

$a_n=a\cdot r^{n-1}$　と表される．

条件より　$ar^3=-54$　……①　　$ar^6=1458$　……②

①を②に代入して　$-54r^3=1458$　　$r^3=-27$

よって　$\boldsymbol{r=-3}$

このとき①より　$-27a=-54$　　$\boldsymbol{a=2}$

一般項は　$a_n=2\cdot(-3)^{n-1}$

これが -486 となるのは　$2\cdot(-3)^{n-1}=-486$　　$(-3)^{n-1}=-243=(-3)^5$

$n-1=5$　　よって　$n=6$

したがって -486 はこの数列の**第 6 項**である．

> 等比数列の一般項に関する問題．等差数列同様，一般項を当たり前のように扱えるようにしたい．等比数列は，公比が正の場合は単調増加，または減少する．そして公比が負の場合は正の数と負の数を交互に繰り返す．

(2)　$\dfrac{3(2^n-1)}{2-1}=93$　より　$2^n=32$　　よって　$\boldsymbol{n=5}$

> 等比数列の和は「初項」「公比」「項数」により決まる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 34 講　数列(1)

1　第 10 項が 230，第 25 項が -220 の等差数列について，次の問いに答えよ．

(1)　初項と公差を求め，一般項を n を用いて表せ．

(2)　初項から第 n 項までの和を n を用いて表せ．

(3)　初項から第 n 項までの和の最大値と，それをとる n を求めよ．

初項 a　公差 d の等差数列の一般項は　$a_n=a+(n-1)d$　と表される．

(1)　$a_{10}=230$　より　$a+9d=230$

$a_{25}=-220$　より　$a+24d=-220$

これらより　$a=500,\ d=-30$

よって求める一般項は　$a_n=500+(n-1)\cdot(-30)=\mathbf{-30n+530}$

(2)　初項から第 n 項までの和を S_n とすると，

$$S_n=\frac{n}{2}\{500+(-30n+530)\}=\frac{n}{2}(1030-30n)=\mathbf{5n(103-3n)}$$

(3)　$a_n<0$　より　$-30n+530<0$　$n>\dfrac{53}{3}=17.6\cdots\cdots$

よって　a_n がはじめて負になるのは　第 18 項

よって求める和の最大は　第 **17** 項までの和 $S_{17}=5\cdot17\cdot(103-51)=\mathbf{4420}$（$n=17$ のとき）

2　等比数列 $\{a_n\}$ において，

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{10}=3,\ \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_{10}}=2$$

のとき，積 $a_1a_2a_3\cdots\cdots a_{10}$ の値を求めよ．

初項 a　公比 r　とする．

$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{10}=3$　　つまり　$a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^9=3$　……①

$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{a_{10}}=2$　より　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{ar}+\dfrac{1}{ar^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{ar^9}=2$

$r^9+r^8+\cdots\cdots+r+1=2ar^9$　　$ar^9+ar^8+\cdots\cdots ar+a=2a^2r^9$

①より　$3=2a^2r^9$　　$a^2r^9=\dfrac{3}{2}$

このとき　$a_1a_2a_3\cdots\cdots a_{10}=a\cdot ar\cdot ar^2\cdot\cdots\cdots ar^9=a^{10}r^{45}=(a^2r^9)^5=\left(\dfrac{3}{2}\right)^5=\mathbf{\dfrac{243}{32}}$

3　[1]　2 つの正の数 a，b がある．a と b の間に 1 つの数 m を入れて，a，m，b がこの順に等差数列，等比数列をなすような m の値をそれぞれ求めよ．

3 つの数 a，m，b がこの順に

等差数列をなす条件は　$a+b=2m$　　よって　$\mathbf{m=\dfrac{a+b}{2}}$

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

等比数列をなす条件は　$ab=m^2$　　よって　$\boldsymbol{m=\sqrt{ab}}$　(>0)

> 3 ［2］ 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+8=0$ が 3 つの実数解 α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ をもつとする．α, β, γ はある順で等差数列となり，またある順で等比数列となる．このとき，実数 a, b, α, β, γ の値を求めよ．

解と係数の関係より

$\alpha+\beta+\gamma=-a$　……①　$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$　……②　$\alpha\beta\gamma=-8$　……③

また，α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ が等差数列をなすとき

$\dfrac{\alpha+\gamma}{2}=\beta$　つまり　$\alpha+\gamma=2\beta$　……④

③より α, β, γ はすべて負，または 2 数が正で 1 数が負である．

α, β, γ がすべて負のとき

$\alpha<\beta<\gamma$ より等比中項は β　よって　$\beta^2=\alpha\gamma$

③より　$\beta^3=-8$　よって　$\beta=-2$

このとき　④より　$\alpha+\gamma=-4$　　③より　$\alpha\gamma=4$

したがって α, γ は 2 次方程式　$t^2+4t+4=0$ の 2 解．よって　$\alpha=\gamma=-2$

ゆえに $\alpha<\beta<\gamma$ を満たさず不適．

α, β, γ のうち 2 数が正で 1 数が負のとき

$\alpha<\beta<\gamma$ より $\alpha<0$, $\beta>0$, $\gamma>0$ である．

α, β, γ が等比数列をなすとき，公比は負であり，等比中項は α である．

よって　$\alpha^2=\beta\gamma$　　③より　$\alpha^3=-8$　よって　$\alpha=-2$

このとき　④より　$-2+\gamma=2\beta$　　③より　$\beta\gamma=4$

これらと $\alpha<\gamma$ より　$\beta=1$, $\gamma=4$　であり，①，②より　$a=-3$, $b=-6$ である．

以上より　$\boldsymbol{a=-3,\ b=-6,\ \alpha=-2,\ \beta=1,\ \gamma=4}$

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第34講　数列(1)

(1)　第10項が -20，第20項が -50 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n=-$ **ア** $n+$ **イウ** である．よって　-110 は数列 $\{a_n\}$ の第 **エオ** 項であり，

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和の最大値は **カキ** である．

(2)　公比が実数である等比数列 $\{a_n\}$ において，$a_6+a_7+a_8=3$，$a_9+a_{10}+a_{11}=-\dfrac{3}{8}$ が成り立つ．このとき　$a_{10}=\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である．

(1)　数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とすると

$a_{10}=-20$　より　$a+9d=-20$　……①

$a_{20}=-50$　より　$a+19d=-50$　……②

①，②より　$a=7$，$d=-3$　　　よって　$a_n=7+(n-1)\cdot(-3)=\mathbf{-3}n+\mathbf{10}$

$a_n=-110$　であるから　$-3n+10=-110$　　$n=40$

よって　-110 は第 **40** 項である．

$a_n<0$　となる n は $-3n+10<0$　　$n>\dfrac{10}{3}=3.3\cdots\cdots$

したがって　数列 $\{a_n\}$ が初めて負になるのは第4項である．

ゆえに数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和の最大値は，初項から第3項までの和

つまり $\dfrac{3}{2}(a_1+a_3)=\dfrac{3}{2}(7+1)=\mathbf{12}$　である．

(2)　数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公比を r とする．

$a_6+a_7+a_8=3$　より　$ar^5+ar^6+ar^7=3$

つまり　$ar^5(1+r+r^2)=3$　……①

$a_9+a_{10}+a_{11}=-\dfrac{3}{8}$ より　$ar^8+ar^9+ar^{10}=-\dfrac{3}{8}$

つまり　$ar^8(1+r+r^2)=-\dfrac{3}{8}$　……②

②に①を代入して　$3r^3=-\dfrac{3}{8}$　　$r^3=-\dfrac{1}{8}$　　公比 r は実数より　$r=-\dfrac{1}{2}$

このとき　①より　$a\cdot\left(-\dfrac{1}{32}\right)\cdot\dfrac{3}{4}=3$　　$a=-128$

よって　$a_{10}=ar^9=-128\cdot\left(-\dfrac{1}{512}\right)=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。